

ЕВРИСТИЧЕН АЛГОРИТЪМ С УСКОРЕНА СХОДИМОСТ ЗА ЕДНОМЕРНА ОПТИМИЗАЦИЯ В НЕОГРАНИЧЕНО ПРОСТРАНСТВО

Д. Борисов

A NEW HEURISTIC ONE DIMENSIONAL OPTIMIZATION ALGORITHM WITH ACCELERATED CONVERGENCE IN BOUNDLESS SPACE

D. Borisov

Химикотехнологичен и металургичен
университет (ХТМУ) – София
Бул. Климент Охридски, 8, София 1756
e-mail: shtain@uctm.edu

University of Chemical Technology and
Metallurgy - Sofia
8, Kliment Ohridski Blvd.
Sofia – 1756, Bulgaria

Abstract — A new heuristic algorithm with accelerated convergence is proposed and investigated. The algorithm includes first four Fibonacci numbers and third order series of numbers for one dimensional optimization without limits of the uncertainty interval of the control parameter. A comparative study with other 3 efficient algorithms: golden search, Kiefer – Johnson – Fibonacci method and combined method with dichotomy and Kiefer – Johnson – Fibonacci method is given. The results show that the new proposed method has a better speed of convergence.

Key Words: one dimensional optimization, heuristic algorithm, golden search method, Fibonacci Kiefer – Johnson method, combined series, interval of uncertainty, comparative analysis.

I. ВЪВЕДЕНИЕ

В литературата са описани много методи и алгоритми за едномерна оптимизация [1,2]. Всеки един от тях има положителни и отрицателни страни при практическото им използване. Изследванията показват, че създаването на комбинирани алгоритми, които обединяват положителните характеристики на два или повече метода, дават по бърза сходимост [3,4]. В настоящото изследване е представен един нов евристичен алгоритъм, който използва комбиниран ред от числа на Фибоначи и функционален ред от трета степен при не зададена област на търсенето.

Анализът на сходимостта на комбинирания ред показва по-бърза сходимост от метода на

златното сечение, метода на Кифер – Джонсън с числа на Фибоначи [5,6] и комбинираните редове от ред на Фибоначи и степенни редове от втора и четвърта степен [4,7]. Този метод може да се използва и за многомерна оптимизация, като алгоритъмът се преработи за търсене на оптимума в дадено многомерно направление – случайно, градиентно или друго направление.

За определяне на областта на неопределеност, т. е. долна А и горна В граници на управляващия параметър X, в която се намира търсеният екстремум на целевата функция Q(X), се предлага следният алгоритъм:

1. Избира се начална точка X_0 и параметър на стъпката h_0 . Определя се успешната посока, в която целевата функция Q(X) се подобрява от X_0 със стъпката h_0 .

2. При всяка успешна стъпка с по-добра стойност на целевата функция Q(X) се прави двукратно увеличение на стъпката (новото $h_0 = 2h_0$) в успешната посока до получаване на по-лош резултат за целевата функция.

3. Координатите на точката преди най-добрата стойност на Q(X), (точка А) и след най-добрата стойност на Q(X), (точка В) определят областта (А ÷ В) за локализиране на максимума на Q(X).

Предложеният нов алгоритъм с ускорена сходимост е следният:

1. Зададена е целева функция Q(X) дефинирана в границите $A \leq X \leq B$, на която се

търси максимум. Задава се точността на локализиране на максимума Δ_{\min} .

2. Изчислява се помощното число M

$$M = \frac{B - A}{\Delta_{\min}}$$

3. Формира се комбинирания степенен ред по алгоритъма, представен на Фиг. 1. Последното число от комбинирания ред се приема с означението R_n .

4. Изчислява се действителната точност, с която ще се локализира максимумът

$$\Delta_m = \frac{B - A}{R_n}$$

5. Изчисляват се координатите на централната точка, $X^{(c)}$;

$$X^{(c)} = A + \frac{B - A}{2}$$

6. За начална точка се приема $X^{(c)}$. Изчислява се целевата функция $Q^{(c)} = Q(X^{(c)})$, която се приема за най-добра: $X_{\text{extr}} = X^{(c)}$, $Q_{\text{extr}} = Q^{(c)}$.

7. Изчислява се нова точка $X^{(1)}$ в посока на нарастване на X с използване на $n-1$ число от генерирания комбиниран ред. Приема се ($k = 1$)

$$X^{(1)} = X_{\text{extr}} + \Delta_m \cdot R_{n-k}$$

8. Изчислява се целевата функция в тази точка

$$Q^{(1)} = Q(X^{(1)})$$

9. При успешна стъпка ($Q^{(1)} > Q_{\text{extr}}$), текущата стойност на координатите на максимума $X^{(1)}$ се запомня като X_{extr} , а стойността на функцията в тази точка, като Q_{extr} . Всяка следваща стъпка се извършва в същото направление с число от комбинирания ред R_i , номерът на което е с единица по-малък от този на използваното в предишната ($k = k + 1$). Алгоритъмът се продължава по формулата от т. 7.

10. Ако стъпката в т. 7 е неуспешна, следващата се стъпка се извършва със същото число от редицата, R_i , в обратното направление

$$X^{(1)} = X_{\text{extr}} - \Delta_m \cdot R_{n-k}$$

11. Изчислява се целевата функция в тази точка

$$Q^{(1)} = Q(X^{(1)})$$

12. При успешна стъпка ($Q^{(1)} > Q_{\text{extr}}$), стойността за параметъра X се запомня като X_{extr} , а стойността на функцията в тази точка, като Q_{extr} , всяка следваща стъпка се извършва в същото направление с число от редицата R_i , номерът на което е с единица по-малък от този на използваното в предишната ($k = k + 1$). Алгоритъмът се продължава по формулата от т. 10.

13. Ако стъпката е неуспешна, следващата стъпка се извършва в обратен направление с число от редицата R_i , номерът на което е с единица по-малък от този на използваното в предишната ($k = k + 1$). Алгоритъмът се продължава формулата от т. 7.

14. За числата от реда R_i ($i = 1, 2, 3$ и 4) търсенето се извършва по алгоритъма на Кифер - Джонсън;

15. Търсенето се прекратява след изчерпване на числата от редицата от числа на комбинирания ред и се извеждат стойностите за Q_{extr} и X_{extr} .

Сходимостта на предложения нов алгоритъм е изследвана чрез сравнителен анализ с няколко от най-добрите алгоритми за едномерна унимодална оптимизация. При всички методи локализирането на оптимума се извършва при едни и същи целеви функции $Q(X)$, условия за област, ако е зададена, начални и крайни параметри на стъпката за търсене на оптимума и критериите за спиране на търсенето. Като критерий за прекратяване на търсенето се използва зададената точност на локализация на оптимума h_{\min} .

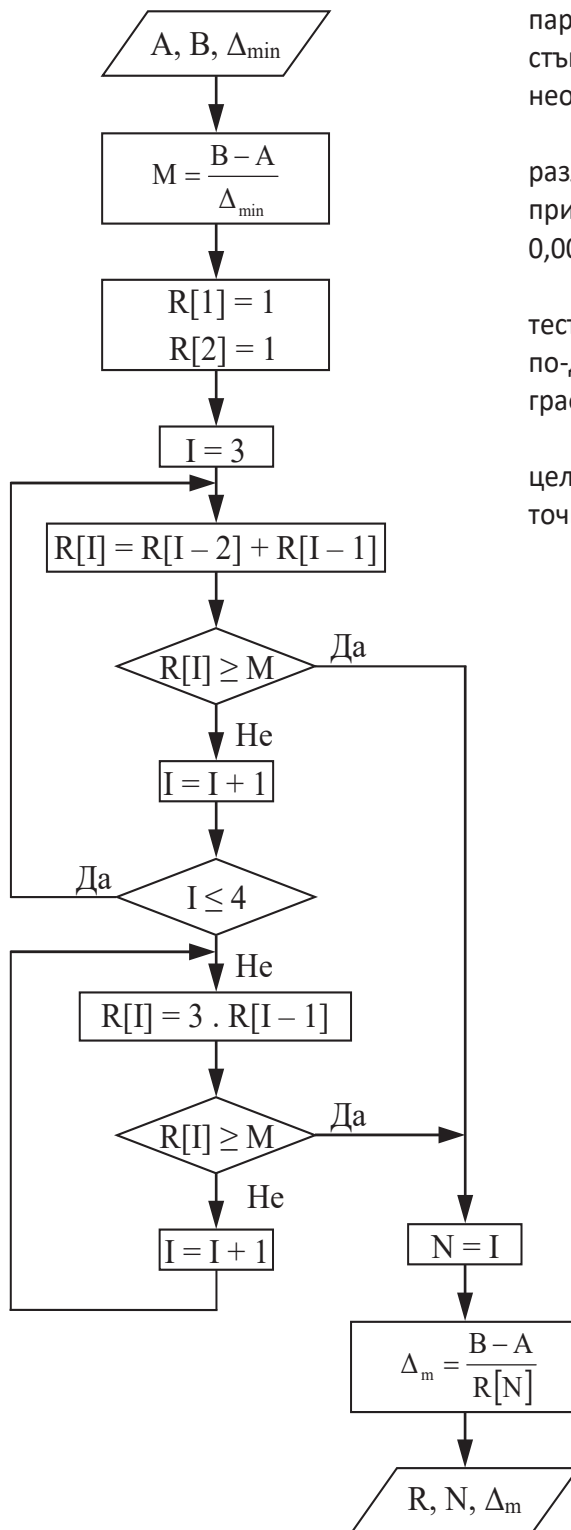
Приети са следните означения на изследваните алгоритми:

GS - метод на „Златното сечение“;

KJF - метод на „Кифер - Джонсън“, използващ числа на Фибоначи (*F*);

2-F - комбиниран метод на „Дихотомията“ и „*KJF*“ с превключване на число 8 от „Дихотомията“ на „*KJF*“ със следната серия числа: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, ...;

3-F - нов комбиниран метод с ред от трета степен и ред на Фибоначи „*KJF*“, с превключване на число 3 със следната серия числа: 1, 1, 2, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, Първите четири числа са от реда на Фибоначи, а следващите са от трети степенен ред.



Фиг. 1. Блок-схема на алгоритъм за генериране на числов ред, включващ първите четири числа от реда на Фибоначи (1, 1, 2, 3) и трети степенен функционален ред

Сравнителният анализ на методите е направен със зададена абсолютна точност за локализиране на екстремума Δ_{\min} по управляващия

параметър X и зададена стойност за параметъра на стъпката за определяне на границите на неопределеност на управляващия параметър $[A, B]$.

Сравнителният анализ е реализиран за различна точност на локализация на екстремума при различни стойности на Δ_{\min} (0,1; 0,01; 0,001; 0,0001 и 0,00001).

Ефективността на методите е изследвана с 2 тестови унимодални целеви функции, представени по-долу и е илюстрирана на Табл. 1. до Табл. 20. и графично представени на Фиг. 2. до Фиг. 5.

Екстремумите на изследваните унимодални целеви функции се локализируют по новия метод с точност Δ_m , която е по-голяма от зададената Δ_{\min} .

(а) Изследване с целева функция

$$F(x) = -3,177x^2 + 21,62x + 1,35$$

Максимумът на тази функция е известен: $F_{\max}(x^*) = 38.839$ при $x^* = 3.468$.

(1) Избраната начална точка е близо до максимума $X_a = -9,00$. Използваната стъпка за определяне на областта на управляващия параметър е $\Delta_0 = 1,00$. По стъпковия алгоритъм, областта, която включва максимума е определена след 7 изчисления за целевата функция и е $[A = -2; B = 14]$.

(2) Избраната начална точка е далече от максимума: $X_a = -14000$. Използваната стъпка за определяне на областта на управляващия параметър е $\Delta_0 = 1,00$. По стъпковия алгоритъм, областта, която включва максимума е определена след 17 изчисления за целевата функция и е $[A = -58092; B = 10575]$.

(б) Изследване с целева функция

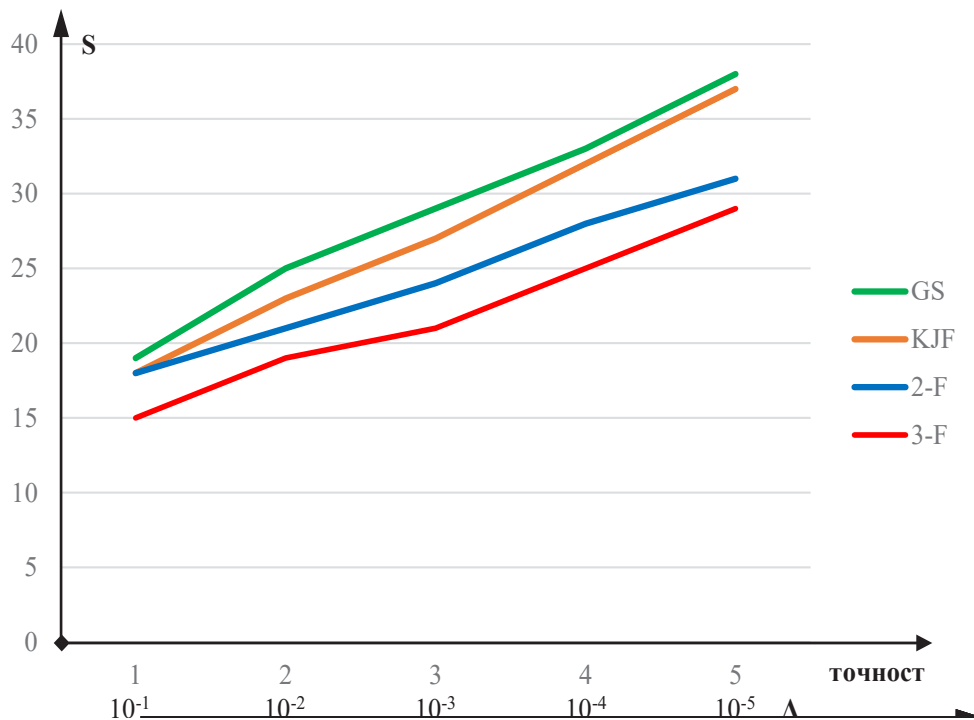
$$F(x) = \frac{15,115}{x^2 - 10,112x + 30,015}$$

Максимумът на тази функция е известен: $F_{\max}(x^*) = 3.39521$ при $x^* = 5.056$.

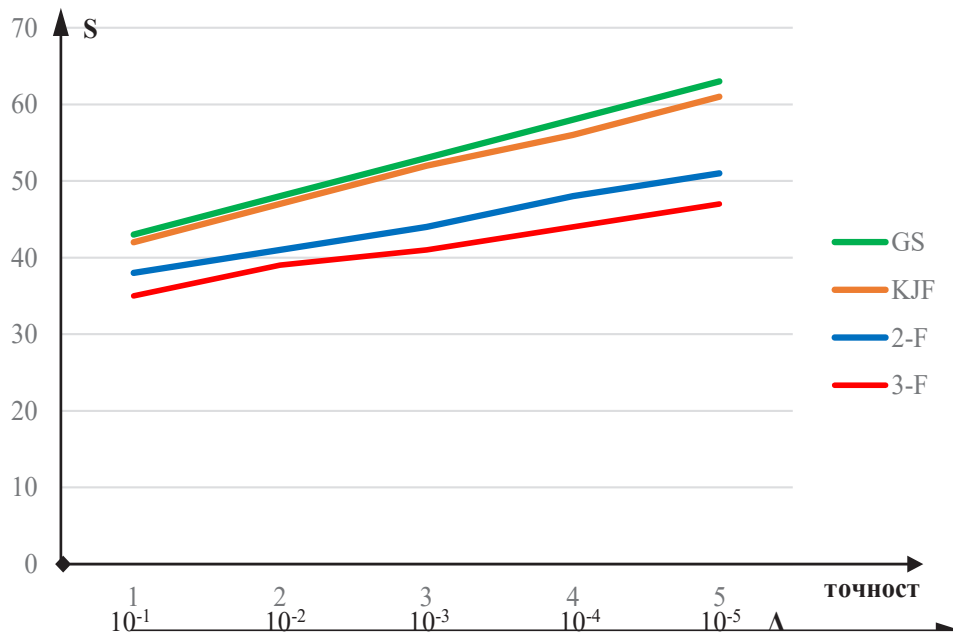
(1) Избраната начална точка е близо до максимума $X_a = -9,00$. Използваната стъпка за определяне на областта на управляващия параметър е $\Delta_0 = 1,00$. По стъпковия алгоритъм, областта, която включва максимума е определена след 7 изчисления за целевата функция и е $[A = -1; B = 15]$.

Таблица 1. Метод на Златното сечение

Δ_{min}	Δ_m	$\frac{\Delta_m}{B-A}$	$\lg \left\{ \frac{\Delta_m}{(B-A)} \right\}$	Точност	S	Q_m	X_m
0.1	0.00362483	0.000226551926892	-3.64483224	1	19	39.87976219	3.59109658
0.01	0.00032685	0.000020428174504	-4.68977044	2	25	39.87999179	3.59834624
0.001	0.00002947	0.000001842007346	-5.73470864	3	29	39.87999999	3.60005765
0.0001	0.00000430	0.000000268745250	-6.57065920	4	33	39.87999999	3.59999871
0.00001	0.00000039	0.000000024232744	-7.61559741	5	38	39.87999999	3.59999871



Фиг. 2. Брой изчисления при зададената точност за методи: GS, KJF, 2-F, 3-F



Фиг. 3. Брой изчисления при зададената точност за методи: GS, KJF, 2-F, 3-F

Таблица 2. Метод на Кифер – Джонсън

Δ_{min}	Δ_m	$\frac{\Delta_m}{B-A}$	$\lg \left\{ \frac{\Delta_m}{(B-A)} \right\}$	Точност	S	Q_m	X_m
0.1	0.06866953	0.004291845493562	-2.36735592	1	18	39.87713533	3.63090129
0.01	0.00619195	0.000386996904025	-3.41229251	2	23	39.87998160	3.59752322
0.001	0.00090339	0.000056462085709	-4.24824308	3	27	39.87999994	3.60013551
0.0001	0.00008146	0.000005091183089	-5.29318128	4	32	39.87999999	3.59997556
0.00001	0.00000735	0.000000459071693	-6.33811949	5	37	39.87999999	3.59999890

Таблица 3. Комбиниран метод на Дихотомията и KJF: 2-F

Δ_{min}	Δ_m	$\frac{\Delta_m}{B-A}$	$\lg \left\{ \frac{\Delta_m}{(B-A)} \right\}$	Точност	S	Q_m	X_m
0.1	0.06250000	0.003906250000000	-2.40823997	1	18	39.8781250	3.62500000
0.01	0.00781250	0.000488281250000	-3.31132995	2	21	39.8799928	3.60156250
0.001	0.00097656	0.000061035156250	-4.21441994	3	24	39.8799927	3.60156250
0.0001	0.00006104	0.000003814697266	-5.41853992	4	28	39.8799999	3.59997559
0.00001	0.00000763	0.000000476837158	-6.32162991	5	31	39.8799999	3.59999847

Таблица 4. Комбиниран метод на ред от трета степен и KJF 3-F

Δ_{min}	Δ_m	$\frac{\Delta_m}{B-A}$	$\lg \left\{ \frac{\Delta_m}{(B-A)} \right\}$	Точност	S	Q_m	X_m
0.1	0.06584362	0.004115226337449	-2.38560627	1	15	39.87736625	3.62962963
0.01	0.00731595	0.000457247370828	-3.33984878	2	19	39.87999960	3.60036580
0.001	0.00081290	0.000050805263425	-4.29409129	3	21	39.87999960	3.60036580
0.0001	0.00009032	0.000005645029269	-5.24833380	4	25	39.87999999	3.60000452
0.00001	0.00000335	0.000000209075158	-6.67969757	5	29	39.87999999	3.60000117

Таблица 5. Брой изчисления на целевата функция за четирите изследвани методи

Δ_{min}	Точност	S			
		GS	KJF	2-F	3-F
0.1	1	19	18	18	15
0.01	2	25	23	21	19
0.001	3	29	27	24	21
0.0001	4	33	32	28	25
0.00001	5	38	37	31	29

Таблица 6. Брой изчисления на целевата функция за четирите изследвани методи

Δ_{min}	Точност	S			
		GS	KJF	2-F	3-F
0.1	1	43	42	38	35
0.01	2	48	47	41	39
0.001	3	53	52	44	41
0.0001	4	58	56	48	44
0.00001	5	63	61	51	47

Таблица 7. Метод на Златното сечение

Δ_{min}	Δ_m	$\frac{\Delta_m}{B-A}$	$\lg \left\{ \frac{\Delta_m}{(B-A)} \right\}$	Точност	S	Q_m	X_m
0.1	0.00362483	0.000226551926892	-3.64483224	1	19	3.39519921	5.05279554
0.01	0.00032685	0.000020428174504	-4.68977044	2	24	3.39520580	5.05727608
0.001	0.00002947	0.000001842007346	-5.73470864	3	29	3.39520704	5.05596867
0.0001	0.00000430	0.000000268745250	-6.57065920	4	33	3.39520704	5.05600510
0.00001	0.00000039	0.000000024232744	-7.61559741	5	38	3.39520704	5.05599980

Таблица 8. Метод на Кифер – Джонсън

Δ_{min}	Δ_m	$\frac{\Delta_m}{B-A}$	$\lg \left\{ \frac{\Delta_m}{(B-A)} \right\}$	Точност	S	Q_m	X_m
0.1	0.06866953	0.004291845493562	-2.36735592	1	18	3.39498765	5.07296137
0.01	0.00619195	0.000386996904025	-3.41229251	2	23	3.39520096	5.05882353
0.001	0.00090339	0.000056462085709	-4.24824308	3	27	3.39520692	5.05640562
0.0001	0.00008146	0.000005091183089	-5.29318128	4	32	3.39520704	5.05597247
0.00001	0.00000734	0.000000459071693	-6.33811949	5	37	3.39520704	5.05599802

Таблица 9. Комбиниран метод на Дихотомията и KJF: 2-F

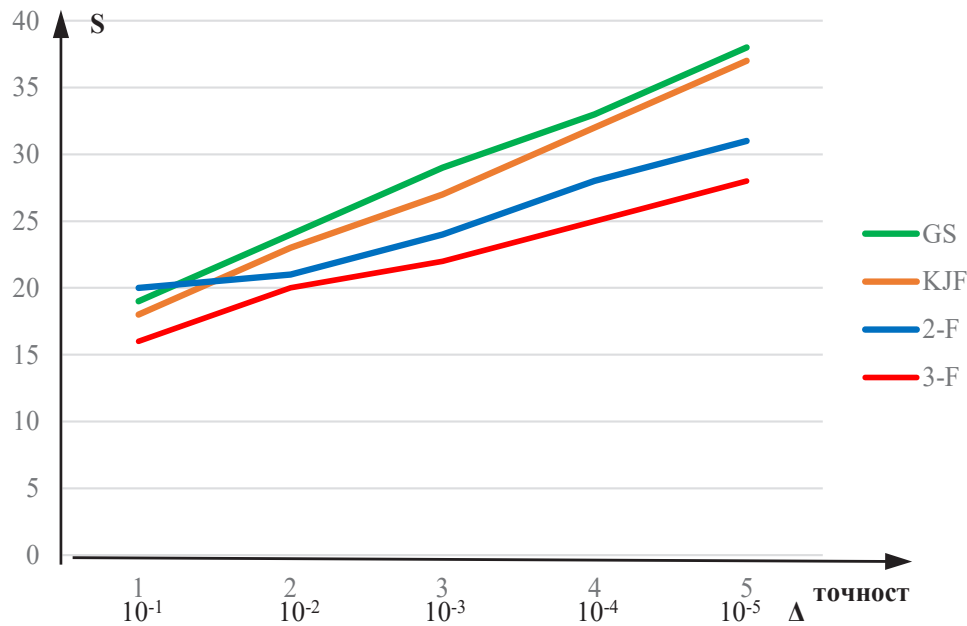
Δ_{min}	Δ_m	$\frac{\Delta_m}{B-A}$	$\lg \left\{ \frac{\Delta_m}{(B-A)} \right\}$	Точност	S	Q_m	X_m
0.1	0.06250000	0.003906250000000	-2.40823997	1	20	3.39517482	5.06250000
0.01	0.00781250	0.000488281250000	-3.31132995	2	21	3.39520573	5.05468750
0.001	0.00097656	0.000061035156250	-4.21441994	3	24	3.39520696	5.05566406
0.0001	0.00006104	0.000003814697266	-5.41853992	4	28	3.39520704	5.05603027
0.00001	0.00000763	0.000000476837158	-6.32162991	5	31	3.39520704	5.05599976

Таблица 10. Комбиниран метод на ред от трета степен и KJF 3-F

Δ_{min}	Δ_m	$\frac{\Delta_m}{B-A}$	$\lg \left\{ \frac{\Delta_m}{(B-A)} \right\}$	Точност	S	Q_m	X_m
0.1	0.06584362	0.004115226337449	-2.38560627	1	16	3.39445963	5.02469136
0.01	0.00731596	0.000457247370828	-3.33984878	2	20	3.39520385	.053955190
0.001	0.00081288	0.000050805263425	-4.29409129	3	22	3.39520692	5.05639384
0.0001	0.00009032	0.000005645029269	-5.24833380	4	25	3.39520704	5.05603256
0.00001	0.00000334	0.000000209075158	-6.67969757	5	28	3.39520704	5.05599910

Таблица 11. Брой изчисления на целевата функция за четирите изследвани методи

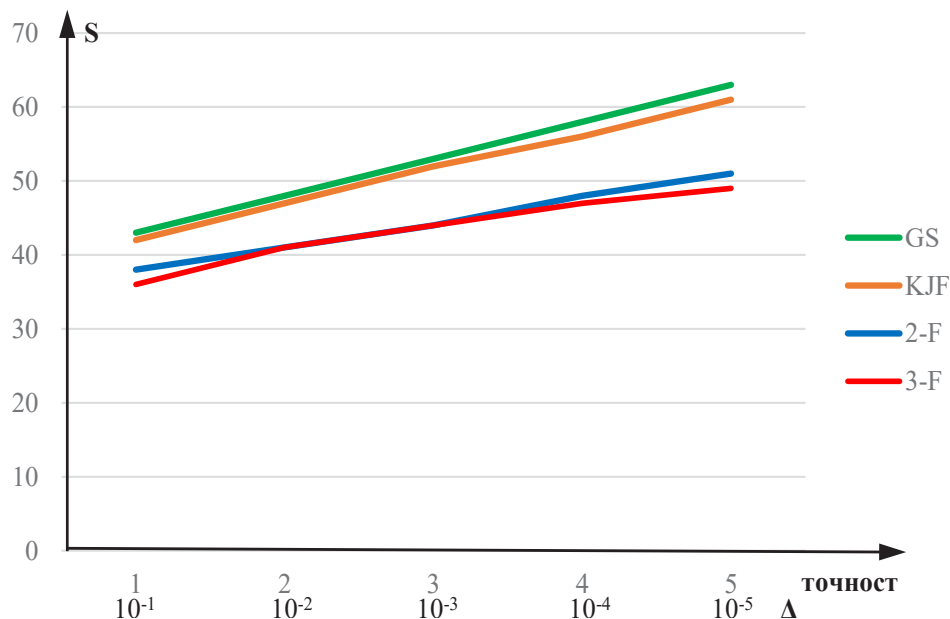
Δ_{min}	Точност	S			
		GS	KJF	2-F	3-F
0.1	1	19	18	20	16
0.01	2	24	23	21	20
0.001	3	29	27	24	22
0.0001	4	33	32	28	25
0.00001	5	38	37	31	28



Фиг. 4. Брой изчисления при зададената точност за методи: GS, KJF, 2-F, 3-F

Таблица 12. Брой изчисления на целевата функция за четирите изследвани методи

Δ_{\min}	Точност	S			
		GS	KJF	2-F	3-F
0.1	1	43	42	38	36
0.01	2	48	47	41	41
0.001	3	53	52	44	44
0.0001	4	58	56	48	47
0.00001	5	63	61	51	49



Фиг. 5. Брой изчисления при зададената точност за методи: GS, KJF, 2-F, 3-F

Избраната начална точка $X_a = -15000$ е далече от максимума. Използваната стъпка за определяне на областта на управляващия параметър е $\Delta_0 = 1,00$. По стъпковия алгоритъм, областта, която включва максимума е определена след 17 изчисления за целевата функция и тя е $[A = -68092; B = 9575.0]$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложеният и изследван нов метод за едномерна оптимизация на унимодални целеви функции с използване на комбиниран ред от числа на Фибоначи и функционален ред от трета степен показва по-бърза сходимост към оптималното решение, в сравнение с известните методи на златното сечение, метода на Кифер и Джонсън с използване само на числата на Фибоначи и от комбинирания метод от числата на Фибоначи и метода на „дихотомията“.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стоянов, С., Оптимизация на технологични обекти, Техника, София, 1983.
2. Стоянов, С., Оптимизация на технологични процеси, Техника, София, 1993.
3. Стоянов, С., Методи и алгоритми за оптимизация, Техника, София, 1990.
4. Стоянов, С., Методи и алгоритми с ускорена сходимост при оптимизация на технологични обекти и системи, Дисертация за д-р т.н., ХТМУ, София, 1990.
5. Kiefer, J., Sequential Minimax Search for a Maximum, Proc. Am. Math. Soc. 1953, v.
6. Johnson, S. M., Optimal Search for a Maximum is Fibonacci, RAND Corp. rep. P-856, 1956.
7. D. Borisov, Investigation of Heuristic Algorithms for One Dimensional Optimization with Accelerated Convergence, Optimization, information technologies and control, SAI, 1, 2018, Online ISSN: 2367-5357.

Частна професионална гимназия по информатика и компютърни науки „Академик Благоев Сендов“

www.gikn.eu

0800 900 11

ПЛОВДИВ ТЕХ ПАРК
ГР. ПЛОВДИВ УЛ. "ВЪЛКО ШОПОВ" №14
www.gikn.eu